

МЕХАНИКА

УДК 529.539

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ЖИДКОСТИ, ПРОТЕКАЮЩЕЙ
В УПРУГОЙ ТРУБКЕ С УЧЕТОМ ВЯЗКО-УПРУГОГО
ТРЕНИЯ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ****Р.Ю.АМЕНЗАДЕ, А.Б.АЛИЕВ, С.А.РУФУЛЛАЕВА***Бакинский Государственный Университет**mexanika.bsu.az@mail.ru*

Процесс распространения волн в деформируемых трубках, содержащих жидкость с учетом взаимодействия с окружающей средой, существенно отличается от свойств гидроупругой системы, когда трубка не закреплена. Объяснением возникающих здесь явлений, роль которых чрезвычайно важна, может быть наличие внешних поверхностных эффектов. В представленной работе, в рамках одномерной линейной теории дано описание периодического по времени пульсирующего течения идеальной несжимаемой жидкости в тонкостенной упругой трубке, с учетом вязко-упругого внешнего трения.

Ключевые слова: волны, идеальная жидкость, вязко-упругость, трение, скорость волны, затухание

Постановка задачи. Приведем основные теоретические положения одномерной теории для линейно-упругой изотропной трубки, с протекающей в ее полости идеальной жидкостью. Пусть дана полубесконечная цилиндрическая трубка. Обозначим через R и h , соответственно, ее радиус и толщину. Жидкость считается однородной и несжимаемой, с плотностью ρ_f . Пренебрежение вязкостью основывается на данных о том, что профили скорости (например, в крупных артериях [1]) приближенно можно считать плоскими, т.е. влияние вязкости ограничено тонкими пограничными слоями. Предлагается также реализация длинноволнового приближения, когда длина волн много больше диаметра трубки. В одномерной модели полагается, что скорость потока $u = u(x, t)$, давление $p = p(x, t)$, радиальное смещение $w = w(x, t)$. Тогда уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{R} \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

а уравнение движения есть

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Здесь $x \in [0, \infty)$ - продольная координата, а t - время. Принимая $w/R \ll 1$, выпишем уравнение движения трубки

$$\rho_* h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sigma - \frac{Eh}{R^2(1-\nu^2)} w, \quad (3)$$

где ρ_* - плотность материала стенки, E - модуль упругости, а ν - коэффициент Пуассона.

Далее положим, что величина σ состоит из двух типов напряжений: гидродинамического p , действующего со стороны жидкости в трубке и напряжения, возникающего в предположении, что окружающая внешняя среда вносит дополнительную вязко-упругую жесткость $G^\vee \frac{\partial w}{\partial t}$.

Отсюда, по аналогии с наследственной теорией упругости [2], для оператора G^\vee запишем

$$G^\vee = G \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} - \int_{-\infty}^t G_0(t-\tau) \frac{\partial w(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right\}. \quad (4)$$

В соотношении (4) $G_0(t-\tau)$ - разностное ядро, описывающее вязкое трение, а G - мгновенный размерный параметр упругой жесткости.

Учитывая теперь равенство (4), уравнение (3) перепишем в форме

$$p = \rho_* h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + G \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} - \int_{-\infty}^t G_0(t-\tau) \frac{\partial w}{\partial \tau} d\tau \right\} + \frac{Eh}{R^2(1-\nu^2)} w. \quad (5)$$

Таким образом, замкнутая система гидроупругости описывается уравнениями (1), (2) и (5).

Исходное уравнение задачи и её решение. Имея уравнения (1), (2) и (5) сведем их к решению интегро-дифференциального уравнения. С этой целью, вначале, комбинируя уравнениями (1) и (2), находим:

$$\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (6)$$

Вычисляя по формуле (5) $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ и подставляя полученный результат в (6), имеем:

$$\frac{\rho_*}{\rho_f} h \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{G}{\rho_f} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - \frac{G}{\rho_f} \int_{-\infty}^t G_0(t-\tau) \frac{\partial^3 w}{\partial w^2 \partial \tau} d\tau + \frac{E}{\rho_f} \frac{h}{R^2(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (7)$$

Введя следующие обозначения

$$\frac{E}{2\rho_f} = c_0^2, \quad \frac{h}{R(1-\nu^2)} = \eta, \quad \frac{\rho_*}{\rho_f} = \rho$$

после ряда элементарных преобразований, получаем следующее интегро-дифференциальное уравнение относительно функции прогиба w

$$\rho \frac{Rh}{2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{RG}{E} c_0^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - \frac{RG}{E} c_0^2 \int_{-\infty}^t G_0(t-\tau) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \tau} d\tau + c_0^2 \eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (8)$$

Используемая здесь модель обобщает ранее предложенные и в ряде случаев сводится к известным. Так, принимая в (8) $G_0(t-\tau) = 0$ приходим к случаю, когда трение внешней среды упругое. Взяв $G = 0$ исключаем влияние окружающей среды. Затем, пренебрегая динамическими эффектами получаем формулу для скорости распространения волны Моэнса-Кортвега

$$\tilde{c} = c_0 \sqrt{\eta}.$$

Разрешающее уравнение. Будем искать значение прогиба, при котором возможны установившиеся колебания. В этом случае, применяя метод Фурье разделения переменных, частное решение уравнения (8) будем искать в виде [3]

$$w(x, t) = y(x) \exp(i\omega t), \quad (9)$$

где ω -задаваемое действительное значение угловой частоты, а y -вообще говоря, комплексная функция координаты положения.

Обратимся вначале к вычислению интегрального слагаемого в (8). Благодаря представлению (9), приняв $t - \tau = \theta$ и введя обозначение

$$\alpha = \int_0^{\infty} G_0(\theta) \exp(-i\omega\theta) d\theta, \quad (10)$$

получим

$$-\frac{RG}{E} c_0^2 \int_{-\infty}^t G_0(t-\tau) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \tau} d\tau = -i \frac{RG}{E} c_0^2 \omega \alpha \exp(i\omega t) y''. \quad (11)$$

Здесь и далее штрихи означают обыкновенную производную по координате x .

Наконец, учитывая равенства (11) и (9) в уравнении (8) и введя в рассмотренное безразмерный параметр упругой жесткости

$$g = R\omega \frac{G}{E},$$

после сокращения на общий временной множитель $\exp(i\omega t)$, окончательно получим:

$$y'' + \frac{\omega^2}{-\rho \frac{Rh}{2} \omega^2 + ic_0^2 g(1-\alpha) + c_0^2 \eta} y = 0, \quad (12)$$

Анализ опытных данных модулей упругости, коэффициентов Пуассона и плотностей для таких материалов как каучук, плексиглас, резина, целлюлоида и плотности вода позволяет заключить, что $\rho \approx 1$, и для длинноволнового приближения первое слагаемое в знаменателе (12) пренебрежимо мало

$$\rho \frac{hR}{2} \omega^2 \ll c_0^2 \eta.$$

Эти соображения позволяют заключить, что гравитационные эффекты в области поперечного сечения трубки малы и уравнение (5) переписать в виде

$$p = G \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} - \int_{-\infty}^t G_0(t-\tau) \frac{\partial w}{\partial \tau} d\tau \right\} + \frac{Eh}{R^2(1-\nu^2)} w. \quad (13)$$

Таким образом, уравнение (12), с достаточной точностью, можно приближенно заменить на следующее

$$y'' + \frac{\omega^2}{ic_0^2 g(1-\alpha) + c_0^2 \eta} y = 0. \quad (14)$$

Записав дисперсионное соотношение посредством равенства

$$\delta^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{1}{\eta + ig(1-\alpha)}, \quad (15)$$

уравнение (13) приведем к виду

$$y'' + \delta^2 y = 0. \quad (16)$$

Решение дисперсионного уравнения. Представив α как $\alpha = \alpha_0 + i\alpha_1$, выражение (15) выразим как

$$\delta^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{1}{(\eta + g\alpha_1) + ig(1-\alpha_0)}.$$

По правилу извлечения квадратного корня из комплексного числа имеем

$$\delta = \delta_0 - i\delta_1,$$

где

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{m+a}{2}}, \quad \delta_1 = \sqrt{\frac{m-a}{2}}, \quad (m = \sqrt{a^2 + b^2}), \quad \text{Im}\alpha < 0. \quad (17)$$

Здесь, в свою очередь, для краткости записи введены обозначения

$$a = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{\eta + g\alpha_1}{(\eta + g\alpha_1)^2 + g^2(1-\alpha_0)^2}, \quad b = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{g(1-\alpha)}{(\eta + g\alpha_1)^2 + g^2(1-\alpha_0)^2}. \quad (18)$$

Уравнение (16) необходимо дополнить граничными условиями

$$y(0) = y_0, \quad y \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Отметим, что значение величины y_0 определим в дальнейшем, принимая, что давление p при $x = 0$ изменяется по закону

$$p(0, t) = p_0 \exp(i\omega t). \quad (20)$$

Учитывая условия (19) и (17), решение уравнения (16) записывается в форме

$$w = y_0 \exp[i(\omega t - \delta x)]. \quad (21)$$

Теперь из уравнения (13) можно непосредственно получить выражение для давления

$$p = y_0 \left\{ i(1-\alpha)g \frac{E}{R} + \frac{2\rho_f}{R} c_0^2 \eta \right\} \exp[i(\omega t - \delta x)]. \quad (22)$$

Сравнением соотношений (20) и (22), получим выражение для y_0 в следующем виде

$$y_0 = \frac{p_0}{i(1-\alpha)g \frac{E}{R} + \frac{2\rho_f}{R} c_0^2 \eta}.$$

Полученное равенство позволяет записать

$$p = p_0 \exp[i(\omega t - \delta x)], \quad (23)$$

$$w = \frac{p_0}{i(1-\alpha)g \frac{E}{R} + \frac{2\rho_f}{R} c_0^2 \eta} \exp[i(\omega t - \delta x)]. \quad (24)$$

Используя равенство (2), легко вычислить функцию u

$$u = i \frac{\delta}{\omega} p_0 \frac{\frac{2}{R} g c_0^2 (1-\alpha) - i \frac{2}{R} c_0^2 \eta}{g \frac{E}{R} i(1-\alpha) + \frac{2\rho_f}{R} c_0^2 \eta} \exp[i(\omega t - \delta x)]. \quad (25)$$

Заметим, что в силу линейности задачи нас интересуют только действительные части величин (23)-(25).

Численная реализация. Прежде всего необходимо задать разностное ядро $G_0(t - \tau)$. Для качественного анализа эту функцию зададим так

$$G(\theta) = g_0 = \text{const}.$$

Это равенство позволяет по формуле (10) определить α как функцию g_0 и ω

$$\alpha = -ik,$$

где $k = g_0 \omega^{-1}$. В этом случае $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = -k$ и вместо (18) имеем

$$a = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{\eta - gk}{(\eta - gk)^2 + g^2}, \quad b = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{g}{(\eta - gk)^2 + g^2}.$$

При $g=k=0$

$$\sqrt{\eta} = \frac{c}{c_0} \approx 0.259, \quad \text{а} \quad \frac{c_0}{\omega} \delta_1 = 0$$

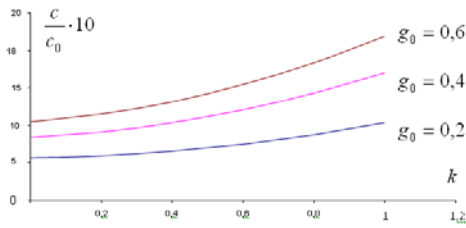


рис. 1

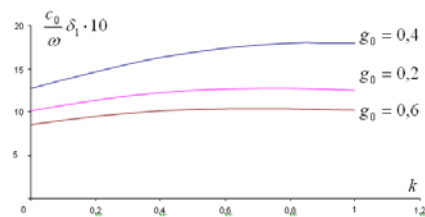


рис. 2

Графики на рис. 1 и 2 дают зависимость безразмерной скорости $\frac{c}{c_0} = \frac{\omega}{\delta_0 c_0}$ волны и затухания δ_1 от величины k , для различных значений g_0 , при исходных данных задачи:

$\frac{h}{R} = 5 \cdot 10^{-2}$ и $\nu = 0,5$, что соответствует значению $\eta \approx 0,067$.

Таким образом, проведенные вычисления позволяют сформулировать следующие выводы:

1. С увеличением k безразмерная скорость волны увеличивается и при фиксированном k ее значение возрастает с увеличением g_0 ;

2. С увеличением k затухание возрастает; однако оно уменьшается с возрастанием величины g_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983, 400 с.
2. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977, 382 с.
3. Амензаде Р.Ю., Киясбейли Э.Т., Насирзаде А.А. О распространении малых возмущений в вязкоупругой жидкости, заключенной в многослойную вязкоупругую трубку. Известия высших учебных заведений. Авиационная техника "Казань" 2'2010, 16-20 с.

**ƏTRAF MÜHİTDƏ ÖZLÜ-ELASTİKİ SÜRTÜNMƏNİ NƏZƏRƏ ALMAQLA
ELASTİKİ BORUDA AXAN MAYEDƏ DALĞALAR**

R.Y.ƏMƏNZADƏ, A.B.ƏLİYEV, S.A.RUFULLAYEVA

XÜLASƏ

İşdə ideal sıxılmayan maye ilə doldurulmuş yarımsonsuz nazikdivarlı silindirik boruda mayenin pusvari axını araşdırılır. Elastiklik nəzəriyyəsinin irsilik prinsipinə analogi olaraq ətraf mühit özlü elastiki bərk qəbul edilir. İxtiyari müxtəlif nüvəli özlülüynün sürtünməsinə xarakterizə edən analitik həllər alınmışdır.

Hesablamalar nəticəsində sabit növ üçün özlülüynün və ani elastikliyi möhkəmliyin parametri ilə dalğanın yayılma sürəti və onun sönməsi arasındakı asılılıq müəyyən edilmişdir.

Açar sözləri: dalğa, ideal maye, özlü-elastiki, sürtünmə, dalğa sürəti, sönmə

**WAVES IN LIQUID FLOW IN ELASTIC PIPE CONSIDERING
VISCO-ELASTIC FRICTION IN MEDIA**

R.Yu.AMENZADEH, A.B.ALIYEV, S.A.RUFULLAYEVA

SUMMARY

Wave flow of liquid in semi-infinite thin-walled cylindrical pipe filled with liquid not pressed perfectly is studied. Media is accepted visco-elastic sided with respect to the heritage principle of the elasticity theory. Analytical solutions were obtained characterizing the friction of arbitrary different core viscosity. The dependence between the velocity of wave propagator and its fading with the parameter of viscosity and instant elasticity strength for stable core was determined as a result of calculations.

Key words: wave, perfect fluid, viscoelasticity, friction, velocity of the waves, attenuation

Поступило в редакцию: 03.10.2013 г.

Подписано к печати: 17.10.2013 г.